Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a VIII-a - Soluţii şi barem

Problema 1. Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulţimii este pătrat perfect.

Soluţie:
Evident, dacă $\{a, b, c, d\}$ este o mulţime cu proprietatea din enunţ, atunci şi mulţimea $\{n^2a, n^2b, n^2c, n^2d\}$ este, pentru orice număr natural nenul n, o mulţime cu proprietatea dorită, deci este suficient să găsim o asemenea mulţime. **1p**
Cum putem găsi o asemenea mulţime?
Dacă $a+b+c = x^2$, $a+b+d = y^2$, $a+c+d = z^2$, $b+c+d = t^2$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, atunci prin adunare obţinem $3(a + b + c + d) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, de unde $a = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - t^2$, $b = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - z^2$, $c = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - y^2$, $d = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - x^2$. .. **2p**
Pentru ca aceste numere să fie naturale şi nenule, trebuie să alegem x, y, z, t astfel încât $3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 3 \max\{x^2, y^2, z^2, t^2\}$. Există multe alegeri convenabile pentru x, y, z, t. De exemplu $\{x, y, z, t\} = \{8, 9, 10, 11\}$ conduce la $\{a, b, c, d\} = \{1, 22, 41, 58\}$. **4p**

Notă: Găsirea unei mulţimi cu proprietatea dorită, chiar şi fără a indica modul de găsire a ei va fi punctată cu **6p**.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a + b + c + d = 2018$. Aflaţi valoarea minimă a expresiei

$$E = (a - b)^2 + 2(a - c)^2 + 3(a - d)^2 + 4(b - c)^2 + 5(b - d)^2 + 6(c - d)^2.$$

Soluţie:
Arătăm că minimul căutat este 14.
Această valoare într-adevăr atinsă, de exemplu dacă $a = b = 505$ şi $c = d = 504$. **1p**
Deoarece 2018 nu este divizibil cu 4, numerele a, b, c, d nu pot fi toate egale.
Dacă trei dintre ele sunt egale, atunci trei dintre pătrate sunt 0, iar celelalte trei sunt nenule. În plus, cele patru numere trebuie să aibă aceeaşi paritate, deci celelalte pătrate sunt cel puţin 4. Astfel $E \geq 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 > 14$. **2p**
Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt diferite (de acestea două şi diferite între ele), atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 14$. **1p**
Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt şi ele egale, atunci:
$a = b$, $c = d$ implică $E \geq 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $a = c$, $b = d$ implică $E \geq 1 + 3 + 4 + 6 = 14$, iar $a = d$, $b = c$ implică $E \geq 1 + 2 + 5 + 6 = 14$. **2p**
În fine, dacă a, b, c, d sunt diferite două câte două atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 14$.
.... **1p**

Problema 3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstraţi că

$$\frac{a}{a^2+7} + \frac{b}{b^2+7} + \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{3}{8}.$$

Soluţie:

Scriem $\dfrac{a}{a^2+7} = \dfrac{a}{a^2+ab+bc+ca+4} = \dfrac{a}{(a+b)(a+c)+4}$. **2p**

Din inegalitatea mediilor, $(a+b)(a+c)+4 \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)\cdot 4} = 4\sqrt{(a+b)(a+c)}$.
.... **2p**

Deoarece $a + b > 0$, $a + c > 0$ ($a + b = 0$ ar implica $a = b = 0$ şi ar contrazice $ab + bc + ca = 3$), putem scrie $\dfrac{a}{a^2+7} \leq \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} = \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a+c}}$.

Aplicând din nou inegalitatea mediilor obţinem $\dfrac{a}{a^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c}\right)$. Analog se obţin relaţiile $\dfrac{b}{b^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b}{b+c} + \dfrac{b}{b+a}\right)$ şi $\dfrac{c}{c^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{c}{c+a} + \dfrac{c}{c+b}\right)$. **2p**

Prin adunarea acestor trei inegalităţi se obţine inegalitatea din enunţ. **1p**

(Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.)

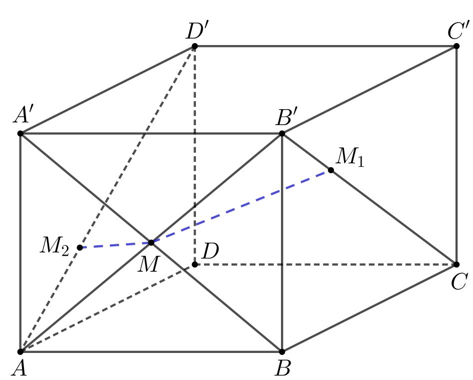
Problema 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M centrul feţei $ABB'A'$. Notăm cu M_1 şi M_2 proiecţiile lui M pe dreptele $B'C$ şi respectiv AD'. Demonstraţi că:

a) $[MM_1] \equiv [MM_2]$;

b) dacă $(MM_1M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;

c) $m\big(\angle\big((MM_1M_2), (ABC)\big)\big) = 45^\circ \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} + \dfrac{BC}{BB'}$.

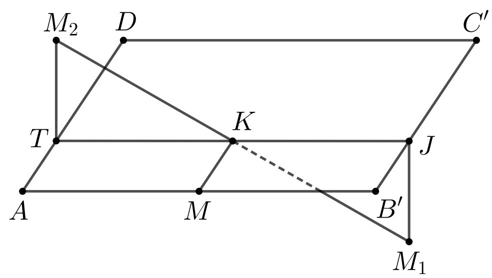
Soluţie:



a) Triunghiurile $AB'C$ şi $B'AD'$ sunt congruente (L.L.L.), deci $\angle AB'C \equiv \angle B'AD'$ Cum $[MB'] \equiv [MA]$, $\angle MB'M_1 \equiv \angle MAM_2$ şi $\angle MM_1B' \equiv \angle MM_2A$, triunghiurile MM_2A şi MM_1B' sunt congruente (I.U.) şi de aici $[MM_1] \equiv [MM_2]$. **1p**

b) Construim $M_1J \perp B'C'$, $J \in B'C'$ şi $M_2T \perp AD$, $T \in AD$. Atunci $M_1J \parallel M_2T$

(ambele perpendiculare pe (ABC)). În plus, $B'M_1 = AM_2$ şi $\angle M_1B'J \equiv \angle M_2AT$ implică $\Delta\, M_1B'J \equiv \Delta\, M_2AT$ (I.U.), deci $M_1J = M_2T$. Rezultă că M_1JM_2T este paralelogram. Fie K punctul de intersecţie a diagonalelor sale. Dar $AT = B'J$ 'si $AT \parallel B'J$ implică $ATJB'$ - paralelogram, deci $MK \parallel AT$. Cum $MK \subset (MM_1M_2)$ şi $AT \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel AD$. **3p**



c) Fie $MM_1 \cap AC = \{L\}$ şi $MM_2 \cap (ABC) = \{S\}$. Atunci $AS \parallel BD \parallel B'D'$ deoarece $B'D' \subset (AB'D')$, $B'D' \parallel BD$ şi $BD \subset (ABC)$. Deci $d = LS$. Fie $AV \perp LM_1$. Atunci triunghiurile AVM şi $B'M_1M$ sunt congruente (I.U.), deci $AV = B'M_1 = AM_2$. Din $AV \parallel B'C$ rezultă că $\angle LAV \equiv \angle ACB' \equiv \angle AD'B' \equiv \angle SAM_2$ (alterne interne deoarece $AS \parallel B'D'$). Atunci triunghiurile AVL şi AM_2S sunt congruente (C.U.), deci $AL = AS$. Dacă U este mijlocul lui $[LS]$, cum $AU \perp LS$ şi $AB \perp LS$ rezultă A, B, U coliniare. Planul (MAB) este planul mediator al lui $[LS]$, deci $MU \perp LS$ şi $AU \perp LS$. Cum $MU \subset (MM_1M_2)$ şi $AU \subset (ABC)$, deducem că $m(\angle\big((MM_1M_2),(ABC)\big)) = m(\angle MUA)$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AB}{2} + AU \Leftrightarrow BB' - AB = 2AU$. Dacă $BI \perp B'C$, $I \in B'C$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AI \perp B'C$. În triunghiul $BB'C$ avem $BI = \frac{BB' \cdot BC}{B'C}$, deci $AI^2 = AB^2 + \frac{BC^2 \cdot B'B^2}{BC^2 + B'B^2}$, $CI^2 = AB^2 + BC^2 - AI^2$, adică $CI = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$. În triunghiul LM_1C, $AI \parallel LM_1$, $M_1I = B'M_1$, deci $\frac{LA}{AC} = \frac{M_1I}{CI} = \frac{B'M_1}{CI}$. Cum $B'M_1 = \frac{B'B^2}{2\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$, rezultă $LA = \frac{B'B^2}{2BC^2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Deoarece $\Delta\, AUL \sim \Delta\, CDA$ deducem că $\frac{AU}{AL} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}$, deci $AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{2BC^2}$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow 2AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{BC^2} = B'B - AB \Leftrightarrow AB \cdot B'B^2 + AB \cdot BC^2 = BC^2 \cdot B'B \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}$. **3p**