



Șimleu Silvaniei, 17 Decembrie, 2011

Concursul Interjudețean de Matematică "Teodor Topan"
Ediția a VI-a

CLASA A VIII-A

Problema 1 a) Arătați că numărul $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$, unde numărul radicalilor este 2011, este irațional.

b) Aflați numărul întreg cel mai apropiat de a .

Problema 2 Determinați numerele naturale nenule n și m astfel ca $n! - 20 = m^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Problema 3 a) Demonstrați că dacă $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$, iar

$$x^2 + y^2 = axy, \quad y^2 + z^2 = byz, \quad z^2 + x^2 = czx,$$

atunci $a^2, b^2, c^2 \in [4, \infty)$ și $abc = a^2 + b^2 + c^2 - 4$.

b) Aflați toate numerele reale a pentru care există $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încât

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = a.$$

Problema 4 Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, \dots, 10$. O „operație” constă în alegerea a trei numere și mărirea fiecăruia din ele cu 1. Demonstrați că în urma unor astfel de operații putem obține ca toate numerele scrise pe tablă să fie egale. Care este numărul minim de operații pe care trebuie să le efectuăm pentru a obține toate numerele egale?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: 2 ore.