Concursul Interjudețean de Matematică „Jose Marti” Bucureşti

Clasa a V-a

Problema 1. Câte valori naturale poate lua „n” astfel încât: $\frac{1}{2}<\frac{n}{3}<\frac{4}{5}$.

Problema 2. Dacă a şi b sunt numere naturale cu $a<b$, atunci notăm $A(a,b)=\{x \mid x\in\mathbb{N},\ a<x<b\}$.

a) Scrieți elementele mulțimii $A(55,110)\cap A(56,112)$.

b) Dacă notăm cu $n(a,b)$ numărul de elemente al mulțimii $A(a,b)$, atunci calculați $n(1,2)+n(2,4)+n(3,6)+...+n(56,112)$.

Problema 3. Dacă împărțim numărul natural „n” la 7 obținem restul 3, iar dacă îl împărțim la 8 obținem restul 5.

a) Găsişi cel mai mic număr natural „n” cu aceste proprietăți.

b) Determinați restul împărțirii lui „n” la 56.

Clasa a VI-a

Problema 1. Să se găsească numărul natural x care împreună cu trei numere naturale consecutive să formeze o proporție cu termenii diferiți doi câte doi.

Problema 2. Fie p un număr prim mai mare ca 2 şi $N=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}$ care se reprezintă ca fracție ordinară ireductibilă de forma $\frac{m}{n}$. Să se arate că $p \mid m$.

Problema 3. Se dă triunghiul ABC cu măsurile unghiurilor A,B,C direct proporționale cu numerele $8,3$ şi respectiv 1.

a) Determinați măsurile unghiurilor A,B şi C.

b) Mediatoarea laturii AC intersectează segmentul BC în punctul E, iar piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC este F, $F\in BC$. Arătați că $EC=2\cdot BF$.

Clasa a VII-a

Problema 1. Pentru $a\in\mathbb{R}^*$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $N_a(n)=a\cdot n+n^2$.

a) Arătați că există o infinitate de valori naturale ale lui a, astfel încât $N_a(n)$ să fie pătrat perfect.

b) Arătați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, există $a\in\mathbb{R}^*$, $2<a\leq 3$ astfel încât $N_a(n)$ este pătrat perfect.

Problema 2. Fie $p_1,p_2,\ \ ,p_n$ primele n numere naturale prime $(n>1)$. Să se arate că $\sqrt{p_1\cdot p_2\cdot ...\cdot p_{n-1}+p_n}\notin\mathbb{Q}$

Problema 3. Se dă trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, $AC\cap BD=\{O\}$ şi $m\left(\widehat{AOB}\right)=60^0$. Dacă lungimea segmentului AC este egală cu suma lungimilor bazelor, arătați că trapezul este isoscel.

Problema 4. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi O mijlocul diagonalei BD. Punctul M aparține segmentului OB, iar perpendiculara în M pe dreapta CM intersectează segmentul AD în punctul N. Dacă $\frac{OM}{MB}=\frac{DN}{NA}$, atunci demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Clasa a VIII-a

Problema 1. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $a+b\cdot\sqrt{3}=5$.

a) Dacă $a^2-3\cdot b^2\in\mathbb{Q}$, atunci arătați că $a\in\mathbb{Q}$.

b) Găsiți valoarea minimă a sumei a^2+b^2.

Problema 2. a) În sistemul de axe xOy se consideră punctele $A(-3;4)$ şi $B(7,-6)$. Calculați lungimea segmentului AB.

b) Determinați câte perechi de numere întregi (x,y) verifică inegalitatea:

$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2}\le 10\cdot\sqrt{2}$.

Problema 3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu aria totală $36\ cm^2$. Dacă M este mijlocul segmentului AA', atunci calculați distanța de la punctul C' la planul (MDB).

Problema 4. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$. Un plan variabil paralel cu baza ABC intersectează muchiile laterale VA, VB, VC în punctele M, N şi respectiv P. Dacă $CN\cap BP=\{Q\}$, atunci arătați că dreapta MQ trece printr-un punct fix din spațiu.

Soluțiile problemelor

Clasa a V-a

Problema 1.

$\frac{1}{2}<\frac{n}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{6}<\frac{2\cdot n}{6}\Leftrightarrow 3<2\cdot n\Leftrightarrow 2\le n$ şi $\frac{n}{3}<\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{5\cdot n}{15}<\frac{12}{15}\Leftrightarrow 5\cdot n<12\Leftrightarrow n\le 2$, deci $n=2$.

Problema 2.

a) $A(55,110)=\{56,57,58,...,108,109\}$ şi $A(56,112)=\{57,58,...,110,111\}$, de unde rezultă că $A(55,110)\cap A(56,112)=\{57,58,...,108,109\}$.

b) $n(1,2)=0$, $n(2,4)=1$, iar pentru $k\ge 3$ avem $A(k,2\cdot k)=k-1$. Răspuns: $0+1+2+...+55=1540$.

Problema 3.

Avem că $n=7\cdot a+3=8\cdot b+5$, $a,b\in\mathbb{N}$, de unde rezultă că $n+11=7\cdot(a+2)=8\cdot(b+2)$. Deci, 56 divide $n+11$, adică există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=56\cdot k-11=56\cdot(k-1)+45$. Cel mai mic număr este 45, iar restul împărțirii lui n la 56 este 45.

Clasa a VI-a

Problema 1.
Notăm cu $n, n+1, n+2$ cele trei numere consecutive. Dacă $x<n$, atunci $x\cdot(n+2)=n\cdot(n+1)$, de unde rezultă, ținând cont de relația $(n+1,n+2)=1$, că $n+1|x$. Dar, $x<n$ şi, prin urmare, $x=0\Rightarrow n=0$, imposibil. Dacă $x>n+2$, atunci $x\cdot n=(n+1)\cdot(n+2)\Rightarrow n|n+2\Rightarrow n\in\{1,2\}$. Obținem că $(n;x)\in\{(1;6),(2;6)\}$.

Problema 2.
Avem că $p-1$ este par şi N este suma unui număr par de fracții. Notăm $k=\dfrac{p-1}{2}$ şi obținem că

$$N=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-1}\right)+...+\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{p}{1\cdot(p-1)}+\frac{p}{2\cdot(p-2)}+...+\frac{p}{k\cdot(k+1)}=\frac{p\cdot a}{(p-1)!}=\frac{m}{n},$$

$a,m,n\in\mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$, de unde rezultă că $p|m\cdot(p-1)!$. Dar, $(p,(p-1)!)=1$ şi, prin urmare, $p|m$.

Problema 3.
a) $\dfrac{A}{8}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{1}=k$ şi $A+B+C=180^0$, de unde rezultă $k=15^0$ şi $A=120^0$, $B=45^0$, $C=15^0$.

b) Se deduce uşor că $BF=AF$, $EC=AE$ şi $m(\sphericalangle FAE)=60^0\Rightarrow m(\sphericalangle AEF)=30^0$. Din triunghiul AEF avem că $AE=2\cdot AF\Rightarrow EC=2\cdot BF$.

Clasa a VII-a

Problema 1.
a) $a=\dfrac{1}{n}\pm 2$ şi $N_a(n)=\left(\dfrac{1}{n}\pm 2\right)\cdot n+n^2=(n\pm 1)^2$.

b) Pentru $n\ge 1$ considerăm $a=2+\dfrac{1}{n}$. Evident $2<a\le 3$, iar $N_a(n)==(n+1)^2$.

Problema 2.
Presupunem că $\sqrt{p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}+p_n}\in\mathbb{Q}$. Rezultă că $p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}+p_n=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Fie p un divizor prim al lui k, atunci $p^2|p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}+p_n$. Dacă $p<p_n$, atunci $p\in\{p_1,p_2,...,p_{n-1}\}$. Deci, $p|p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}+p_n$ şi $p|p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}\Rightarrow p|p_n$. Contradicție. Dacă $p\ge p_n$, atunci p^2 nu divide $p_1\cdot p_2\cdot...\cdot p_{n-1}+p_n$.

Problema 3.
Notăm cu $a=m(\sphericalangle CDO)=m(\sphericalangle OBA)$. Dacă $a>60^0$, atunci din triunghiurile ODC şi OAB obținem $DC<OC$ şi $AB<AO\Rightarrow AB+CD<AO+OC=AC$. Contradicție. Analog, dacă $a<60^0$, atunci $DC>OC$ şi $AB>AO\Rightarrow AB+CD>AO+OC=AC$. Contradicție. Deci, $m(\sphericalangle CDO)=m(\sphericalangle OBA)=60^0$, de unde rezultă că triunghiurile AOB şi DOC sunt echilaterale şi, prin urmare, trapezul $ABCD$ este isoscel.

Problema 4. Ducem $MP\parallel OC$, $P\in BC$, $\dfrac{OM}{MB}=\dfrac{CP}{PB}=\dfrac{DN}{NA}\Rightarrow NP\parallel AB$, deci $NDCP$ este dreptunghi şi $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle BMP)$, N,P şi D se află pe cercul de diametru NC, de unde

$m(\sphericalangle NMD)=\dfrac{m(\overset{\frown}{ND})}{2}=\dfrac{m(\overset{\frown}{PC})}{2}=m(\sphericalangle PMC)$, deci

$m(\sphericalangle OMP)=m(\sphericalangle OMC)+m(\sphericalangle CMP)=m(\sphericalangle OMC)+m(\sphericalangle NMD)=90^0$, de unde rezultă

$m(\sphericalangle BOC)=90^0$ şi deci $ABCD$ este pătrat.

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) $a+b\cdot\sqrt{3}=5\Rightarrow\left[\left(a^2-3\cdot b^2\right)-25\right]+2\cdot\left(3\cdot b^2+a\cdot b\cdot\sqrt{3}\right)=0$, relație pe care o notăm cu (1). Dacă $a^2-3\cdot b^2-25\in\mathbb{Q}$ şi din (1) obținem $3\cdot b^2+a\cdot b\cdot\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$, iar din $a^2-3\cdot b^2\in\mathbb{Q}$ şi $3\cdot b^2+a\cdot b\cdot\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ obținem că $a\cdot\left(a+b\cdot\sqrt{3}\right)\in\mathbb{Q}\Rightarrow a\in\mathbb{Q}$.

b) $a=5-b\cdot\sqrt{3}\Rightarrow a^2+b^2=4\cdot b^2-10\cdot b\cdot\sqrt{3}+25=\left(2\cdot b-\dfrac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}\geq\dfrac{25}{4}$.

Problema 2.

a) $AB=10\cdot\sqrt{2}$.

b) Dacă punctul M este de coordonate (x,y), atunci $MA=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$, $MB=\sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2}$ şi $MA+MB\geq AB$. Dar, din ipoteză, $MA+MB=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2}\leq 10\cdot\sqrt{2}=AB$. Prin urmare, $MA+MB=AB\Leftrightarrow M\in[AB]$. Se consideră funcția $f:[-3;7]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=m\cdot x+n$, Din $A,B\in G_f\Rightarrow f(x)=-x+1$. Obținem $x\in[-3;7]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Răspuns: 11.

Problema 3.

Notăm cu O centrul bazei $ABCD$. Se obține uşor că $AB=\sqrt{6}\ cm$, $OC'=3\ cm$, $MC'=\dfrac{3\cdot\sqrt{6}}{2}\ cm$, $m(\sphericalangle MOC')=90^0$, $CO'\perp BD$, iar în final $CO'\perp(MDB)$. Răspuns: $3\ cm$.

Problema 4.

Notăm cu $d_1=(MPQ)\cap(ABC)$ şi cu $d_2=(MNQ)\cap(ABC)$. Se deduce uşor că $d_1 \parallel AC$ şi $d_2 \parallel AB$. Dacă notăm $d_1\cap d_2=\{R\}$, atunci $ABRC$ este paralelogram., iar dreapta MQ trece prin punctul M care este fix.